



线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

2025 年 06 月 25 日



回顾

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 线段树



【例】Can you answer these queries III

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these
queries III

Can you answer these
queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

给定长度为 n 的序列 a ，以及 m 条指令，每条指令可能是以下两种之一：

① $1 \times y$ ，查询区间 $[x, y]$ 中的最大连续子段和，即 $\max_{x \leq l \leq r \leq y} \{\sum_{i=l}^r a[i]\}$

② $2 \times y$ ，把 $a[x]$ 改成 y 。

对于每个查询指令，输出一个整数表示答案。



【例】Can you answer these queries III

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行两个整数 n, m ($n \leq 5 \times 10^5, m \leq 10^5$)。

接下来一行 n 个整数，表示序列 a ，输入保证 $-1000 \leq a[i] \leq 1000$ 。

接下来 m 行，每行一个操作，具体格式见题面。

【输出格式】

对于每个查询指令，输入一行一个整数表示答案。

【样例输入】

```
5 3
1 2 -3 4 5
1 2 3
2 2 -1
1 3 2
```

【样例输出】

```
2
-1
```



【例】Can you answer these queries III

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

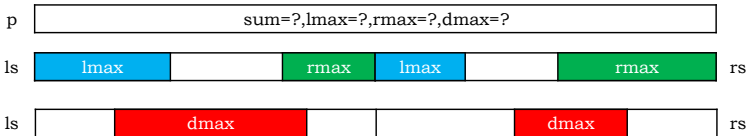
矩形周长

窗口中的星星

练习

- 显然每个区间只记录区间的最大连续子段和 $dmax$ 是不够的，因此额外维护三个信息：区间和 sum 、从区间左端点开始的最大连续字段和 $lmax$ 、从区间右端点开始的最大连续字段和 $rmax$ 。
- 由两个子区间合并成大区间的方法如下：

```
1 void pushup(int c, int L, int R)
2 {
3     int lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
4     f[c].sum = f[lc].sum + f[rc].sum;
5     f[c].dmax = max({f[lc].dmax, f[rc].dmax, f[lc].rmax + f[rc].lmax});
6     f[c].lmax = max(f[lc].lmax, f[lc].sum + f[rc].lmax);
7     f[c].rmax = max(f[rc].rmax, f[rc].sum + f[lc].rmax);
8 }
```





【例】Can you answer these queries III

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these
queries III

Can you answer these
queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 修改只涉及单点修改，所以不需要懒标记。

```
1 void update(int c, int L, int R, int x, int y)
2 {
3     if(L == R) { f[c] = { y, y, y, y }; return; }
4     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
5     if(x <= M) update(lc, L, M, x, y);
6     else update(rc, M + 1, R, x, y);
7     pushup(c, L, R);
8 }
```



【例】Can you answer these queries III

- 查询某一个区间的最大连续子段时，该区间的相关信息也可以由划分后的两个子区间得到。

```
1 Node query(int c, int L, int R, int l, int r)
2 {
3     if (l <= L && R <= r) return f[c];
4     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
5     Node a = { 0, -INF, -INF, -INF }, b = a, ans = a;
6     if(l <= M) a = query(lc, L, M, l, r);
7     if(M < r) b = query(rc, M + 1, R, l, r);
8     if(a.sum == -1e9) ans = b;
9     else if(b.sum == -1e9) ans = a;
10    else
11    {
12        ans.sum = a.sum + b.sum;
13        ans.dmax = max({a.dmax, b.dmax, a.rmax + b.lmax});
14        ans.lmax = max(a.lmax, a.sum + b.lmax);
15        ans.rmax = max(b.rmax, b.sum + a.rmax);
16    }
17    return ans;
18 }
```

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习



【例】Can you answer these queries IV

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these
queries III

Can you answer these
queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

给定长度为 n 的序列 a ，以及 m 条指令，每条指令可能是以下两种之一：

① $0 \times y$ ，将区间 $[x, y]$ 内每个数开方，下取整。

② $1 \times y$ ，询问区间 $[x, y]$ 的每个数的和。

对于每个查询指令，输出一个整数表示答案。



【例】Can you answer these queries IV

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行两个整数 n, m ($n \leq 5 \times 10^5, m \leq 10^5$)。

接下来一行 n 个整数，表示序列 a ，输入保证序列之和不超过 10^{18} 。

接下来 m 行，每行一个操作，具体格式见题面，输入不保证 $x \leq y$ 。

【输出格式】

对于每个查询指令，输入一行一个整数表示答案。

【样例输入】

```
5 5
1 2 3 4 5
1 2 4
0 2 4
1 2 4
0 4 5
1 1 5
```

【样例输出】

```
9 4 6
```



【例】Can you answer these queries IV

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 对于不超过 $K = 10^{18}$ 的数，最多约需要 $\log K$ 次开方即可变为 1，所以被开方的总次数约为 $N \log K$ 。
- 查询区间和显然满足区间加法，显然需要维护区间和。
- 区间修改一般需要用懒标记，但是本题不能用懒标记，因为无法通过懒标记直接维护区间和，但是考虑总的开方次数，对于区间开方，对每一个数直接开方即可。
- 显然，如果区间内的数全为 1，显然无需进行区间开方，所以需要维护区间是否全为 1 的信息。



【例】Can you answer these queries IV

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

```
1 int f[N << 4]; // 是否全为 0、1
2 long long s[N << 4];
3 void update(int c, int L, int R, int l, int r) {
4     if(f[c]) return;
5     if(L == R) {
6         a[L] = sqrt(a[L]);
7         f[c] = (a[L] <= 1), s[c] = a[L]; return;
8     }
9     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
10    if(l <= M) update(lc, L, M, l, r);
11    if(M < r) update(rc, M + 1, R, l, r);
12    f[c] = f[lc] & f[rc], s[c] = s[lc] + s[rc];
13 }
14 long long query(int c, int L, int R, int l, int r) {
15     if(l <= L && R <= r && f[c]) return s[c];
16     if(L == R) return a[L];
17     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
18     long long ans = 0;
19     if(l <= M) ans += query(lc, L, M, l, r);
20     if(M < r) ans += query(rc, M + 1, R, l, r);
21     return ans;
22 }
```



【例】色板游戏

色板长度为 L , L 是一个正整数, 所以我们可以均匀地将它划分成 L 块 1 厘米长的小方格。并从左到右标记为 $1, 2, \dots, L$ 。

现在色板上只有一个颜色, 老师告诉阿宝在色板上只能做两件事:

- ① $C \ A \ B \ C$ 指在 A 到 B 号方格中涂上颜色 C 。
- ② $P \ A \ B$ 指老师的提问: A 到 B 号方格中有几种颜色。

学校的颜料盒中一共有 T 种颜料。为简便起见, 我们把他们标记为 $1, 2, \dots, T$ 。开始时色板上原有的颜色就为 1 号色。面对如此复杂的问题, 阿宝向你求助, 你能帮助他吗?

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习



【例】色板游戏

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行三个整数 L, T, M ($L \leq 10^5, T \leq 30, M \leq 10^5$)。

接下来 M 行，每行一个指令，具体见题目描述，输入不保证 $A \leq B$ 。

【输出格式】

对于老师的每个提问，输入一行一个整数表示答案。

【样例输入】

```
2 2 4
C 1 1 2
P 1 2
C 2 2 2
P 1 2
```

【样例输出】

```
2
1
```



【例】色板游戏

- 观察到颜色的种类 $T \leq 30$ ，那么可以用二进制位表示每一种颜色。
- 区间内的颜色应当为区间内所有方格的颜色按位或，因此每个区间维护一个整数表示颜色即可。
- 对于区间修改，懒标记直接记录当前区间被修改的颜色，后续修改和下传直接覆盖颜色即可。

```
1 unsigned int f[N << 2], lazy[N << 2]; // 颜色和懒标记颜色
2 void pushdown(int c, int L, int R)
3 {
4     if(lazy[c] == 0) return;
5     int lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
6     f[lc] = f[rc] = lazy[c]; // 左右两个区间的颜色直接被覆盖
7     lazy[lc] = lazy[rc] = lazy[c];
8     lazy[c] = 0;
9 }
```

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these
queries III

Can you answer these
queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习



【例】色板游戏

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

```
1 void update(int c, int L, int R, int l, int r, unsigned int v)
2 {
3     if(l <= L && R <= r) { f[c] = v, lazy[c] = v; return ; }
4     pushdown(c, L, R);
5     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
6     if(l <= M) update(lc, L, M, l, r, v);
7     if(M < r) update(rc, M + 1, R, l, r, v);
8     f[c] = f[lc] | f[rc];
9 }
10
11 unsigned int query(int c, int L, int R, int l, int r)
12 {
13     if(l <= L && R <= r) return f[c];
14     pushdown(c, L, R);
15     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
16     unsigned int ans = 0;
17     if(l <= M) ans |= query(lc, L, M, l, r);
18     if(M < r) ans |= query(rc, M + 1, R, l, r);
19     return ans;
20 }
```



【例】区间最大公约数

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

给定长度为 n 的数列 a ，以及 m 条指令，每条指令可能是以下两种之一：

- ① C l r d ，表示把 $a[l], a[l+1], \dots, a[r]$ 都加上 d 。
- ② Q l r ，表示询问 $a[l], a[l+1], \dots, a[r]$ 的最大公约数 (GCD)。

对于每个查询指令，输出一个整数表示答案。



【例】区间最大公约数

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行两个整数 n, m ($n \leq 5 \times 10^5, m \leq 10^5$)。

接下来一行 n 个整数，表示序列 a ，输入保证 $-2^{60} \leq a[i] \leq 2^{60}$ 。

接下来 m 行，每行一个指令，具体格式见题面。

【输出格式】

对于每个查询指令，输入一行一个整数表示答案。

【样例输入】

```
5 5
1 3 5 7 9
Q 1 5
C 1 5 1
Q 1 5
C 3 3 6
Q 2 4
```

【样例输出】

```
1
2
4
```



【例】区间最大公约数

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 利用结论 $\gcd(a, b, c, d) = \gcd(\gcd(a, b), \gcd(c, d))$ ，可以利用线段树快速求解区间最大公约数，但是无法快速更新。
- 根据更相减损术¹，有 $\gcd(a, b) = \gcd(a, b - a)$ ，实际上该结论对于任意多个整数都成立，即 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \gcd(a_1, a_2 - a_1, \dots, a_n - a_{n-1})$ 。
- 构造数列 a 的差分序列 b ，用线段树维护序列 b 的最大公约数：
 - 对于查询操作 $Q \ l \ r$ ，就等于求出 $\gcd(a[l], query(l + 1, r))$ 。
 - 对于修改操作相当在线段树上进行单点修改。
- 求解时需要 $a[l]$ ，所以可以利用树状数组 (线段树) 来维护序列 a 的差分数组 b 即可。

¹见《九章算术》。



【例】区间最大公约数

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 对于修改操作 $C\ l\ r\ d$ ，相当于序列 b 中的 $b[l]$ 加 d 、 $b[r+1]$ 减 d ：
 - 在树状数组上执行单点修改 l 和 $r+1$ 的值。
 - 在线段树上执行单点修改 l 和 $r+1$ 的值，此时要注意越界问题 $r+1 > n$ 。

```
1 add(l,d), update(1, 1, n, l, d);  
2 if(r < n) add(r + 1, -d), update(1, 1, n, r + 1, -d);
```

- 对于查询操作 $Q\ l\ r$ ：
 - 利用树状数组求出更新后的 $a[l]$ 的值。
 - 在线段树上查询区间 $[l+1, r]$ 的最大公约数，此时要注意 $l=r$ 的情况。
 - 答案即为上述查询结果的最大公约数。

```
1 long long al = ask(1), ar = 0;  
2 if(l < r) ar = query(1, 1, n, l + 1, r);  
3 ans = labs(gcd(al, ar));
```

- 时间复杂度： $O(M \log N)$ 。



【例】方差

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

给定长度为 n 的由实数构成数列 a ，以及 m 条指令，每条指令可能是以下三种之一：

- ① $1 \ x \ y \ k$ ，表示把第 x 到第 y 项每项加上一个数字 k ， k 为实数。
- ② $2 \ x \ y$ ，表示求出第 x 到第 y 项这一子数列的平均数。
- ③ $3 \ x \ y$ ，表示求出第 x 到第 y 项这一子数列的方差。

对于每个查询指令，输出一个实数 (保留 4 位小数) 表示答案。



【例】方差

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行两个整数 n, m ($n \leq 5 \times 10^5, m \leq 10^5$)。

接下来一行 n 个整数，表示序列 a ，输入保证 $-1000 \leq a_i \leq 1000$ 。

接下来 m 行，每行一个指令，具体格式见题面。

【输出格式】

对于每个查询指令，输出一个实数 (保留 4 位小数) 表示答案。

【样例输入】

```
5 5
1 5 4 2 3
2 1 4
3 1 5
1 1 1 1
1 2 2 -1
3 1 5
```

【样例输出】

```
3.0000
2.0000
0.8000
```



【例】方差

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 对于平均数，显然维护区间和即可。
- 对于方差，

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^2 - 2a_i\bar{a} + \bar{a}^2) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \bar{a} + \bar{a}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\bar{a}^2 + \bar{a}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \bar{a}^2$$

显然需要维护区间元素平方的和。

- 对于区间 $[L, R]$ 增加实数 k ，区间和增加 $(R - L + 1) \times k$ ，区间平方和增加 $2 \times k \times s[L, R] + (R - L + 1) \times k^2$ 。



【例】方差

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

```
1 // 区间和 区间平方和
2 double a[N], b[N << 2], d[N << 2], lazy[N << 2];
3 void pushdown(int c, int L, int R) {
4     if(!lazy[c]) return;
5     int M = (L + R) / 2, lc = c * 2, rc = c * 2 + 1;
6     d[lc] += 2 * lazy[c] * b[lc] + (M - L + 1) * lazy[c] * lazy[c];
7     d[rc] += 2 * lazy[c] * b[rc] + (R - M) * lazy[c] * lazy[c];
8     b[lc] += (M - L + 1) * lazy[c];
9     b[rc] += (R - M) * lazy[c];
10    lazy[lc] += lazy[c], lazy[rc] += lazy[c];
11    lazy[c] = 0;
12 }
13 void update(int c, int L, int R, int l, int r, double k) {
14     if(l <= L && R <= r) {
15         d[c] += 2 * k * b[c] + (R - L + 1) * k * k;
16         b[c] += (R - L + 1) * k;
17         lazy[c] += k;
18         return ;
19     }
20     pushdown(c, L, R);
21     ...
22 }
23 void query(...)
```

// 请读者自行完成



【例】高速公路

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

高速公路是由一条由 $n - 1$ 段路和 n 个收费站组成的东西向的链，从收费站 i 行驶到 $i + 1$ (或从 $i + 1$ 行驶到 i) 需要收取 v_i 的费用。高速路刚建成时所有的路段都是免费的，即所有 $v_i = 0$ 。

政府部门根据实际情况，会不定期地对连续路段的收费标准进行调整，根据政策涨价或降价。

无聊的小 A 同学总喜欢研究一些稀奇古怪的问题，他开车在这条高速路上行驶时想到了这样一个问题：对于给定的 l, r ，在第 l 个到第 r 个收费站里等概率随机取出两个不同的收费站 a 和 b ，那么从 a 行驶到 b 将期望花费多少费用呢？



【例】高速公路

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行两个整数 n, m ($n \leq 5 \times 10^5, m \leq 10^5$), 分别表示收费站个数和费用调整的次数。

接下来 m 行, 每行表示一次调整或询问, 询问格式如下:

- C l r v , 表示将第 l 个收费站到第 r 个收费站之间所有道路的通行费用增加 v , 输入保证 $-10^4 \leq v \leq 10^4$ 且任何时刻 $0 \leq v_i \leq 10^4$ 。
- Q l r , 对于给定的 l, r , 回答小 A 的问题。

【输出格式】

对于每次询问, 输出一行一个既约分数表示答案。

若答案为一个整数 a , 请输出 $a/1$ 。

【样例输入】

```
4 5
C 1 4 2
C 1 2 -1
Q 1 2
Q 2 4
Q 1 4
```

【样例输出】

```
1/1
8/3
17/6
```



【例】高速公路

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 对于区间 $[l, r]$, 可选的方案总数为 $(r - l + 1)/(r - l)$, 对于每个方案求区间求区间和然后除以上述值即为期望。
- 显然枚举 a, b , 然后区间求和时间复杂度过高, 那么不妨统计每条道路总共被走过多少次。
- 为了方便统计, 不妨令 $a \leq b$, 最后统计结果乘以 2 即可。对于道路 i , 它对答案的贡献为 $(i - l + 1) \times (r - i) \times v_i$, 那么总的结果为

$$\sum_{i=l}^{r-1} (i - l + 1) \times (r - i) \times v_i = \sum_{i=l}^{r-1} (-i^2 + (l + r - 1) \times i + r - l \times r) \times v_i$$

$$= - \sum_{i=l}^{r-1} i^2 \times v_i + (l + r - 1) \sum_{i=l}^{r-1} i \times v_i + (r - l \times r) \sum_{i=l}^{r-1} v_i$$

- 故而需要利用线段树维护 $i^2 \times v_i, i \times v_i, v_i$ 的区间和。



【例】高速公路

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

```
1 // i * i 前缀和 i 前缀和
2 long long d[N], e[N];
3 // vi*i*vi vi*vi vi
4 long long a[N << 2], b[N << 2], c[N << 2], lazy[N << 2];
5
6 void pushdown(int p, int L, int R)
7 {
8     if(!lazy[p]) return;
9     int M = (L + R) / 2, lc = p * 2, rc = p * 2 + 1;
10    a[lc] += lazy[p] * (d[M] - d[L - 1]);
11    b[lc] += lazy[p] * (e[M] - e[L - 1]);
12    c[lc] += lazy[p] * (M - L + 1);
13    a[rc] += lazy[p] * (d[R] - d[M]);
14    b[rc] += lazy[p] * (e[R] - e[M]);
15    c[rc] += lazy[p] * (R - M);
16    lazy[lc] += lazy[p], lazy[rc] += lazy[p];
17    lazy[p] = 0;
18 }
```



【例】高速公路

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

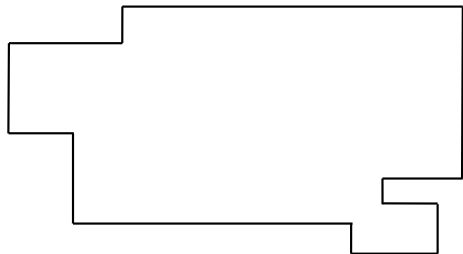
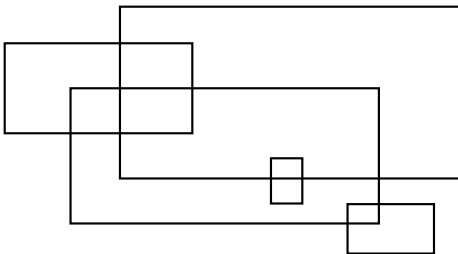
练习

```
1 void update(int p, int L, int R, int l, int r, int v)
2 {
3     if(l <= L && R <= r)
4     {
5         a[p] += (long long)v * (d[R] - d[L - 1]);
6         b[p] += (long long)v * (e[R] - e[L - 1]);
7         c[p] += (long long)v * (R - L + 1);
8         lazy[p] += v;
9         return;
10    }
11    pushdown(p, L, R);
12    if(l <= M) update(lc, L, M, l, r, v);
13    if(M < r) update(rc, M + 1, R, l, r, v);
14    a[p] = a[lc] + a[rc], b[p] = b[lc] + b[rc], c[p] = c[lc] + c[rc];
15 }
16
17 // query 请读者自行完成
```



【例】Atlantis

给定平面直角坐标系中的 n 个矩形，它们的边和 x 轴、 y 轴平行。这些矩形之间可能有部分重叠，求这些矩形覆盖的区域的总面积。



线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习



【例】Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行一个整数 n ($n \leq 10^4$)。

接下来 n 行，每行包含四个整数 x_1, y_1, x_2, y_2 ， (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 分别是地图的左上角位置和右下角位置。

注意： $0 \leq x_1 < x_2 \leq 10^5, 0 \leq y_1 < y_2 \leq 10^5$ 且不一定为整数。

【输出格式】

一行一个数表示覆盖区域的总面积，保留两位小数。

【样例输入】

```
10 10 20 20
15 15 25 25.5
```

【样例输出】

```
180.00
```



【例】 Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

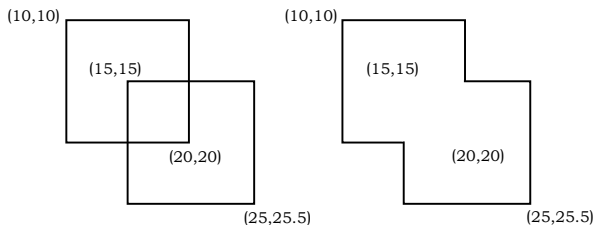
练习

【样例解释】

两个矩形的左上角和右下角坐标分别为：

```
10 10 20 20
15 15 25 25.5
```

则这两个矩形覆盖的总面积为 180。





【例】Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

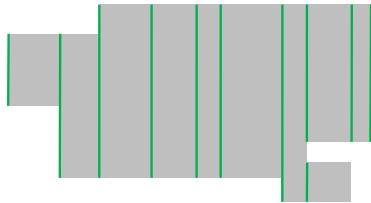
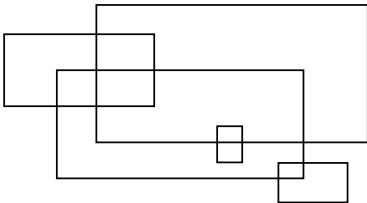
Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 扫描线法
- 用一条竖直线从左到右扫过整个坐标系，那么直线上被矩形区域覆盖的长度只会在每个矩形的左右边界处发生变化。
- 换言之，整个区域可以被分成 $2n$ 段，每一段在直线上覆盖的长度 (记为 L) 是固定的，因此该段的面积为 $L \times$ 该段的宽度，各段面积之和即为所求。





【例】Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

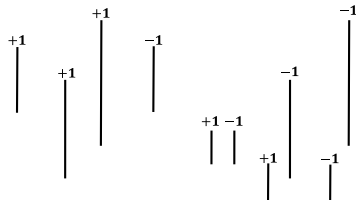
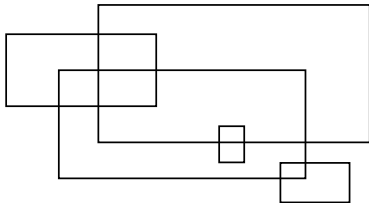
Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 若一个矩形的左上角和右下角坐标为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ，则我们将左边界记为四元组 $(x_1, y_1, y_2, 1)$ ，右边界记为四元组 $(x_2, y_1, y_2, -1)$ 。把这 $2n$ 个四元组按照 x 递增排序则可以得到：



- 建立一个数组 a 来维护扫描线，其中 $a[i]$ 表示扫面线上第 i 段 (纵坐标为 $i \sim i + 1$) 被覆盖的次数，初始时全为 0。
- 逐一扫描排序后的这 $2n$ 个四元组，设当前的四元组为 $(i, y_1, y_2, 1)$ ，则我们将数组 $a[y_1 \sim y_2 - 1]$ 的值都加 1。反之，则都减 1。



【例】 Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 如果下一个四元组的横坐标为 j ，则扫描线从 i 扫到 j 的过程中，被覆盖的长度为 $L = \sum(a[k] > 0)$ ，即扫描线中至少被覆盖一次的段的总长度，这一段的面积为 $(j - i) \times L$ ，累加到答案中即可。
- 对于每个四元组，采用朴素算法在 a 数组上执行修改与统计，可以在 $O(N^2)$ 的时间内求出区域的面积。
- 注意本题中 y 坐标的范围较大而且不是整数，所以需要对输入的 y 坐标进行离散化。



【例】Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 可以使用线段树维护数组 a ，将算法优化到 $O(N \log N)$ 。
- 先利用离散化将纵坐标 y_1, y_2 映射到 $1 \sim m$ ，后续 y_1, y_2 均为整数。
- 因为四元组 $(x_1, y_1, y_2, 1)$ 和 $(x_2, y_1, y_2, -1)$ 是成对出现的，所以没必要使用延迟标记。
- 线段树的每个结点上维护该结点自身被覆盖的次数 $f[]$ ，那么整个 y 坐标范围 $1 \sim m - 1$ 中被覆盖次数 > 0 的长度即为 L 。
- 对于四元组 $(x, y_1, y_2, \pm 1)$ ，在 $[y_1, y_2 - 1]$ 上执行区间修改，将区间覆盖的所有完整结点的 f 都加 (减)1。
- 对于线段树的任意一个结点 $[L, R]$ ，若 $f[] > 0$ ，则其区间所代表的实际长度就是对 L 的贡献。否则，递归求解两个子结点的长度之和。



【例】Atlantis

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

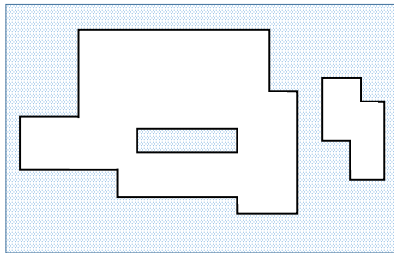
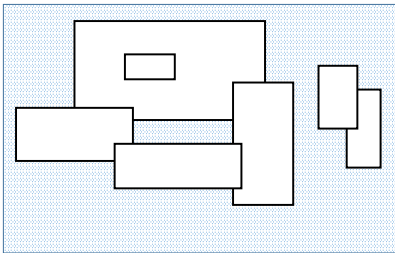
练习

```
1 for(int i = 1; i <= n; ++i) scanf("%lf%lf%lf%lf", &x[i], &y[i], &x[n + i], &y[n + i]);
2 for(int i = 1; i <= n; ++i) a[i] = y[i], a[n + i] = y[n + i];
3 sort(a + 1, a + 2 * n + 1);
4 int m = unique(a + 1, a + 2 * n + 1) - (a + 1); // 离散化
5 for(int i = 1; i <= n; ++i)
6 {
7     op[i].x = x[i], op[i].d = 1;
8     op[n + i].x = x[n + i], op[n + i].d = -1;
9     op[i].y1 = op[n + i].y1 = lower_bound(a + 1, a + m + 1, y[i]) - a;
10    op[i].y2 = op[n + i].y2 = lower_bound(a + 1, a + m + 1, y[n + i]) - a;
11 }
12 sort(op + 1, op + 2 * n + 1, cmp); // 按照 x 坐标从小到大 x 坐标相同则优先 +1
13 // 线段树操作
14 build(1, 1, m - 1);
15 double ans = 0;
16 update(1, 1, m - 1, op[1].y1, op[1].y2 - 1, op[1].d);
17 for(int i = 2; i <= 2 * n; ++i)
18 {
19     ans += (double)(op[i].x - op[i - 1].x) * query(1, 1, m - 1, 1, m - 1);
20     update(1, 1, m - 1, op[i].y1, op[i].y2 - 1, op[i].d);
21 }
```



【例】矩形周长

给定 n 个矩形，它们的边都是垂直或水平的。每个矩形可以部分或全部覆盖其他矩形，所有矩形组成的集合的边界称为周界。请你编写一个程序计算周界。



线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习



【例】矩形周长

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

第一行一个整数 n ，表示矩形的个数。

接下来 n 行，每行四个数 x_1, y_1, x_2, y_2 ，分别表示矩形的左下角和右上角。

【输出格式】

一行一个整数，表示输入数据中所有矩形集的周界。

【样例输入】

```
7
-15 0 5 10
-5 8 20 25
15 -4 24 14
0 -6 16 4
2 15 10 22
30 10 36 20
34 0 40 16
```

【样例输出】

```
228
```

【数据范围】

$n \leq 5000$, $-10^4 \leq x_1, y_1, x_2, y_2 \leq 10^4$ ，所有输入均为整数，答案在 32 位整数范围内。



【例】矩形周长

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

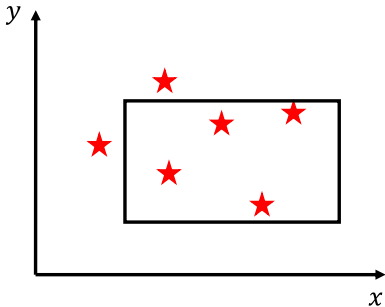
- 将每个矩形变为 $(x_1, y_1, y_2, 1)$ 和 $(x_2, y_1, y_2, -1)$ 的四元组，然后在纵坐标范围 (统一处理为正数) 内建立线段树维护区间覆盖长度的度，在线段树对区间 (y_1, y_2) 进行加 1 或减 1 操作即可。
- 纵向的周长显然为区间修改后整个坐标范围覆盖长度的变化之和。
- 通过观察可以发现，横向的周长等于扫描时坐标范围连续覆盖的总段数乘以 2，故而需要额外维护：
 - 当前区间被连续覆盖的段数；
 - 为了方便区间合并，需要维护区间左右端点是否被覆盖。
- 其实，可以在横向和纵向分别执行扫描线，统计二者的和即为答案，代码实现复杂度较低。



【例】窗口中的星星

在一个天空中有很多星星（看作平面直角坐标系），已知每颗星星的坐标和亮度（都是整数）。

求用宽为 w 、高为 h 的矩形窗口（ w, h 为正整数）能圈住的星星的亮度总和最大是多少。（矩形边界上的星星不算）



线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习



【例】窗口中的星星

线段树题目选讲

河南省实验中学信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

【输入格式】

输入包含多组测试用例。

每个用例的第一行包含 3 个整数： n , w , h , 表示星星的数量, 矩形窗口的宽和高。

然后是 n 行, 每行有 3 个整数: x , y , c , 表示每个星星的位置 (x, y) 和亮度。没有两颗星星在同一点上。

【输出格式】

每个测试用例输出一个整数, 表示亮度总和最大值。

【样例输入】

```
3 5 4
1 2 3
2 3 2
6 3 1
3 5 4
1 2 3
2 3 2
5 3 1
```

【样例输出】

```
5
6
```



【例】窗口中的星星

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方星

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 直接枚举矩形来围住星星难度较大，可以换个角度：对于星星 (x, y, c) ，能圈住这颗星星的矩形的右上角顶点坐标范围是一个 (x, y) 到 $(x + w, y + h)$ 的矩形范围。
- 注意：矩形边界上的星星不算。不妨将所有星星的的坐标改为 $(x - 0.5, y - 0.5)$ ，然后令圈住星星的右上角坐标均为整数，那么这个范围为 (x, y) 到 $(x + w - 1, x + h - 1)$ 。
- 问题转化为：平面上由若干个矩形区域，每个区域都有一个权值，求在哪个坐标重叠的区域权值和最大。其中，每个矩形区域的权值为星星的亮度。
- 可以使用扫描线法：将星星 (x, y, c) 转化为四元组 $(x, y, y + h - 1, c)$ 和 $(x + w, y, y + h - 1, -c)$ ，注意坐标范围较大，需要离散化。
- 在纵坐标范围内建立线段树，执行区间加 c 或减 c ，维护区间最大值即可，每一次修改后查询线段树根结点的值即可。



练习

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 售票系统 (COGS 247)
- Balanced Lineup(COGS 3704)
- 快速矩阵操作 (COGS 3962)
- 简单的线段树 (COGS 2961)
- 广告牌 (COGS 2372)
- 数列操作 D(COGS 2632)
- 旅馆 (COGS 2968)



练习

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these
queries III

Can you answer these
queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- Can you answer these queries III(COGS 3240)
- Can you answer these queries IV(COGS 4148)
- 数据结构难题 (COGS 2371)
- 色板游戏 (COGS 4149)
- 区间最大公约数 (COGS 2876)
- 贴海报【HAOI 2014】(COGS 1682)
- 方差 (COGS 2232)
- 高速公路【HAOI 2012】(COGS 795)
- Atlantis(COGS 3408)
- 窗口中的星星 (COGS 3409)
- 矩形周长【IOI 1998】(COGS 263)



练习

线段树题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

例题

Can you answer these queries III

Can you answer these queries IV

色板游戏

区间最大公约数

方差

高速公路

扫描线法

Atlantis

矩形周长

窗口中的星星

练习

- 序列操作【SCOI 2010】(COGS 2083)
- K 小数简化 (COGS 3913)
- 回转寿司【BJOI2016】(COGS 3687)
- Physical Education Lessons(CF915E)
- MEX Queries(CF817F)
- 列队【NOIP 2017】(COGS 2871)
- 链上二次求和【BJOI 2018】(P4458)
- 区间【NOI 2016】(COGS 2406)
- 比赛【NOIP 2022】(COGS 3814)
- Wall【IOI 2014】(P4560)
- 楼房重建 (COGS 2770)
- 等差子序列 (COGS 3947)
- 序列 (P4891)